R_1 e R_2 rappresentazioni di $\mathcal{L}$ che hanno generatori R_1 e R_2 sullo spazio vettoriale ϕ e η rispettivamente. P. es. R_1 = matrice 3×3 di $SU(3)$ e R_2 = matrice 8×8 di $SU(3)$ (o altra 3×3 di $SU(3)$)

R_1 ha peso M_1 $\qquad H_1 \phi_i = M_1(h)\, \phi_i$

R_2 ha peso M_2 $\qquad H_2 \eta_i = M_2(h)\, \eta_i$

Lo spazio prodotto è generato da vettori $\underline{\phi \otimes \eta}$ che in pratica sono $n+m$ dimensionali

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$$

Definisco la rappresentazione prodotto come l'operatore che vuoto un spazio la scriviamo e [illegible]

ruoli invertiti

$$R_1 \otimes R_2 = \mathcal{R}_{1\times 2} = \begin{pmatrix} R_1\phi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi \\ R_2\eta \end{pmatrix}$$

Ad un $h \in H$ corrisponde una operazione composta

$$H_{12}(h) := \begin{pmatrix} H_1(h) & \\ & H_2(h) \end{pmatrix} \qquad t.c.$$

$$H_{12}(h)\begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1\phi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi \\ H_2\eta \end{pmatrix}$$

$$= \underset{(1\ 0)}{M_1(h)} + \underset{(1\ 0)}{M_2(h)} \begin{pmatrix} \phi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$(2\ 0)$

quindi corrisponde a $M_1 + M_2$ sommati come vettori nello spazio dei pesi. Questo significa che

$$(1,0)\otimes(1,0) \supset (2,0)$$

$$(1,0)\otimes(0,1) \supset (1,1)$$

Nel caso di rappresentazioni uguali $(1,0)\otimes(1,0)$ è possibile decomporre il risultato in una parte simmetrica e una antisimmetrica.

La parte simmetrica coinvolge la rappresentazione identificata dal peso più alto $(2\Lambda,0)$. Quella antisimmetrica non può usare due volte i pesi più alti, quindi il peso più alto della antisimmetrica deve essere fatto col più alto di una e il secondo più alto dell'altra

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = (2,0)+(0,1) \qquad 3\times 3 = 6+\bar{3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = (1,1) + (0,0)$$

$3 \times 3 \times 3 \supset 1$

$3 \times \bar{3} = 8 + 1$

rappresentazioni di dimensione più alta possono essere costruite a partire dalle rappresentazioni basiche che sono quelle con tutti 0 tranne un 1 indice di Dynkin.

Per le algebre $A_n = SU(N)$ basta $(1,0)$ ma è un caso particolare (sebbene molto diffuso)

$$b_i := \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \qquad \text{rep} = (m_1, m_2, m_3, \ldots) \supset \prod_{m_i \in \text{rep}} \pi^{m_i} b_i$$

si ottiene moltiplicando m_1 volte b_1, moltiplicando m_2 volte b_2 e così via